ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ ΕΠΑΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:53

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 03/06/2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1.

Έστω $t_1, t_2, ..., t_v$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής *X* ενός δείγματος μεγέθους ν , με μέση τιμή $\overline{x}$.Θέλουμε να δείξουμε ότι ο αριθμητικός μέσο των διαφορών αυτών, δηλαδή :

$$\frac{(t_1-\overline{x})+(t_2-\overline{x})+...+(t_v-\overline{x})}{v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}(t_i-\overline{x})}{v}$$, είναι ίσος με το μηδέν.

Έχουμε: $\frac{(t_1-\overline{x})+(t_2-\overline{x})+...+(t_v-\overline{x})}{v}=\frac{t_1+t_2+...+t_v}{v}-\frac{v\overline{x}}{v}=\overline{x}-\overline{x}=0$.

Α.2.

Μια συνάρτηση *f* με πεδίο ορισμού *A* λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Α.3. α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

Α.4. α) $(c)'=0$ β) $(x^2)'=2x$

ΘΕΜΑ Β

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0			
1	15		
2	11		
3	8		
4	6		50
Σύνολο	50	100	

Β.1.

$$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu \Leftrightarrow \nu_1+15+11+8+6=50 \Leftrightarrow \nu_1+40=50 \Leftrightarrow \nu_1=50-40 \Leftrightarrow \nu_1=10$$

$$f_1\%=\frac{\nu_1}{\nu}\cdot 100=\frac{10}{50}\cdot 100=20$$

$$f_2\%=\frac{\nu_2}{\nu}\cdot 100=\frac{15}{50}\cdot 100=30$$

$$f_3\%=\frac{\nu_3}{\nu}\cdot 100=\frac{11}{50}\cdot 100=22$$

$$f_4\%=\frac{\nu_4}{\nu}\cdot 100=\frac{8}{50}\cdot 100=16$$

$$f_5\%=\frac{\nu_5}{\nu}\cdot 100=\frac{6}{50}\cdot 100=12$$

$$N_1=\nu_1=10$$

$$N_2=N_1+\nu_2=10+15=25$$

$$N_3=N_2+\nu_3=25+11=36$$

$$N_4=N_3+\nu_4=36+8=44$$

$$N_5=N_4+\nu_5=44+6=50$$

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0	**10**	**20**	**10**
1	15	**30**	**25**
2	11	**22**	**36**
3	8	**16**	**44**
4	6	**12**	**50**
Σύνολα	50	100	

B.2. Για την μέση τιμή, συμπληρώνουμε νέα στήλη $x_i \cdot \nu_i$

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	**10**	**20**	**10**	**0**
1	15	**30**	**25**	**15**
2	11	**22**	**36**	**22**
3	8	**16**	**44**	**24**
4	6	**12**	**50**	**24**
Σύνολο	50	100		**85**

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \frac{85}{50} = \frac{170}{100} = 1,7$$

B.3. Έχουμε 50 παρατηρήσεις επομένως θέλουμε το ημιάθροισμα 25ης και 26ης παρατήρησης.

$\delta = \frac{1+2}{2} = 1,5$ (25η παρατήρηση το 1)

B.4. α) Το πολύ 3 ώρες, άρα θέλουμε $F_4\% = f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20\% + 30\% + 22\% + 16\% = 88\%$

ή αλλιώς $100\% - f_5\% = 100\% - 12\% = 88\%$

β) Έστω y_i οι νέες υπερωρίες, άρα έχουμε $y_i = x_i + 4$ επομένως $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 = 5,7$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ.1. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha,\ \ \alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = -6x^2 + 12x,\ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x > 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -6x(x-2) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2$

Η μονοτονία της f προκύπτει από τον πίνακα:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	Τ.ΕΛ.	↗	Τ.ΜΕΓ.	↘	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,2]$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $[2,+\infty)$

Γ.2. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ με τιμή $f(0)=\alpha$ και τοπικό μέγιστο στο $x=2$ με τιμή $f(2)=8+\alpha$.

Επίσης, ότι το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων είναι -8 σημαίνει ότι:

$$\frac{f(0)+f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{8+\alpha+\alpha}{2} = -8 \Leftrightarrow 2\alpha + 8 = -16 \Leftrightarrow 2\alpha = -24 \Leftrightarrow \alpha = -12$$

Γ.3. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

Για το σημείο Μ έχουμε $f(1) = -2 + 6 - 12 = -8$. Επομένως είναι $M(1, f(1))$ ή $M(1,-8)$.

Επίσης είναι $f'(1) = -6 + 12 = 6$.

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ, είναι $\varepsilon: y = f'(1)x + \beta \Leftrightarrow y = 6x + \beta$.

Το $M(1,-8) \in \varepsilon \underset{y=-8}{\overset{x=1}{\Leftrightarrow}} -8 = 6\cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$

Επομένως η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $\varepsilon: y = 6x - 14$.

Γ.4. Για $x \in [2,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε ισχύει:

$$x \ge 2 \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x) \le f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \le -4 \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \ge 0 \overset{-2<0}{\Leftrightarrow} x^3 - 3x^2 + 4 \ge 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Έχουμε $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\lambda x^2+7x+\frac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=x^2+2\lambda x+7, x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(1)=0 \Leftrightarrow 1^2+2\lambda+7=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=-4$$

Άρα $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+\frac{2}{3}, x\in\mathbb{R}$ και $f'(x)=x^2-8x+7, x\in\mathbb{R}$

Δ.2.

Για την μονοτονία:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 7=64-28=36$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{8\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{8\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{14}{2}=7\\ \frac{2}{2}=1\end{cases}$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x^2-8x+7>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(7,+\infty)$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x^2-8x+7<0 \Leftrightarrow x\in(1,7)$$

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f		↗	Τ.ΜΕΓ.	↘	Τ.ΕΛΑΧ.	↗	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[7,+\infty)$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,7]$

Δ.3. $2020, 2025\in(7,+\infty)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα

$$2020<2025 \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(2020)<f(2025) \Leftrightarrow f(2025)-f(2020)>0$$

$\frac{3}{2},\frac{5}{2}\in(1,7)$ όπου η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα

$$\frac{3}{2}<\frac{5}{2} \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right)>f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)>0$$

Οπότε $\mathrm{A}>0$

Δ.4. $f'(x) = x^2 - 8x + 7,\ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 2x - 8,\ x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-(2x-8)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{3}^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-8)(x-2)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{x+1-3} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-8)\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x-8)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3}\right) =$$

$$= -6\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = -12\sqrt{3}$$

$(*)$ $x^2-10x+16=0$ με $\Delta = 36$ και $x_1 = 8, x_2 = 2$ άρα $x^2-10x+16=(x-8)(x-2)$